Interrogation n°2 – Équations différentielles
Corrigé

Énoncé : résoudre $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

- On résout $E_H : y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est

$$\begin{aligned} & r^2 - 4r + 4 = 0 \\ \iff & (r-2)^2 = 0 \\ \iff & r = 2 \end{aligned}$$

  (Ici le discriminant Δ est nul) Les solutions de E_H sont les fonctions :

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{2x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- On cherche une solution particulière de $E : y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. On pose

$$y_p(x) = Cx^2e^{2x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y_p'(x) & = 2Cxe^{2x} + 2Cx^2e^{2x} \\ & = 2Ce^{2x}\left(x + x^2\right) \\ y_p''(x) & = 4Ce^{2x}(x + x^2) + 2Ce^{2x}\left(1 + 2x\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & y_p'' - 4y_p' + 4y_p = e^{2x} \\ \iff & 4Ce^{2x}(x + x^2) + 2Ce^{2x}\left(1 + 2x\right) - 4 \times 2Ce^{2x}\left(x + x^2\right) + 4Cx^2e^{2x} = e^{2x} \\ \iff & 4C\left(x + x^2\right) + 2C(1 + 2x) - 8C\left(x + x^2\right) + 4Cx^2 = 1 \\ \iff & C \times \left(4x^2 - 8x^2 + 4x^2 + 4x + 4x - 8x + 2\right) = 1 \\ \iff & 2C = 1 \\ \iff & C = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Donc $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$ convient.

Finalement, les solutions de E sont les fonctions :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + (A + Bx)e^{2x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

Barême :

- Solution y_H : 7 pts
  - Rédaction : 2 pts
  - Équation caractéristique et racine double : 2 pts
  - Solution y_H : 3 pts
- Solution y_p : 12 pts
  - Rédaction : 1 pt
  - Forme de y_p : 3 pts
  - Dérivées de y_p : 4 pts
  - Valeur de C, expression finale de y_p : 4 pts
- Conclusion : 1 pt